Capitolo 1

Introduzione all'Algebra delle Matrici

Definizione 1.0.1. *Chiamiamo matrice $m \times n$ a coefficienti in $\mathbb{K}$ una tabella di mn elementi disposti su m righe e n colonne.*

Definizione 1.0.2. *Indichiamo l'insieme delle matrici a m righe ed n colonne fatte di elementi in $\mathbb{K}$ con $Mat_{m,n}(\mathbb{K})$ (dove $m, n \geq 1$).*

Se $m = n$, cioè se il numero delle righe è uguale al numero delle colonne, diciamo che la matrice è quadrata, e scriviamo semplicemente $Mat_n\mathbb{K}$.
Gli elementi di una generica matrice $A = (a_{i,j})$ si indicano con la notazione $a_{i,j}$ dove i è l'indice di riga e j l'indice di colonna.

Esempio 1.0.1. *Sia* $A = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 3 \\ \frac{1}{2} & -5 & 0 \end{pmatrix}$.
A è una matrice rettangolare con $m = 2$ righe e $n = 3$ colonne ad elementi in $\mathbb{R}$. Scriviamo $A \in Mat_{2,3}(\mathbb{R})$.
GLi elementi sono così identificati: $a_{1,1} = 1, \quad a_{1,2} = \sqrt{2}, \quad a_{1,3} = 3, \quad a_{2,1} = \frac{1}{2}, \quad a_{2,2} = -5, \quad a_{2,3} = 0.$
Possiamo scrivere $A \in Mat_{2,3}(\mathbb{Q})$? Perché?

Esempio 1.0.2. *Sia* $A = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 9 & 0 \end{pmatrix}$.
A è una matrice quadrata con $m = n = 2$ righe e colonne ad elementi in $(\mathbb{R})$.
Scriviamo $A \in Mat_2(\mathbb{R})$.
Possiamo scrivere $A \in Mat_2(\mathbb{Q})$*? E* $A \in Mat_2(\mathbb{Z})$*?*

1.1 Matrici particolari

Definiamo alcuni particolari tipi di matrici:

- La matrice nulla, i cui elementi sono tutti nulli.
  Ad esempio $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in Mat_3(\mathbb{R})$;
- La matrice identica I con tutti uno sulla diagonale e zero altrove.
$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix} \in Mat_n(\mathbb{R});$$
- Matrici diagonali, se $a_{i,j} = 0$, $\forall i \neq j$, cioè sono tutti nulli gli elementi fuori dalla diagonale principale. Osserviamo che per qualche i potrebbe essere $a_{i,i} = 0$;
- Matrici Tridiagonali in cui sono nulli tutti gli elementi tranne quelli sulla diagonale principale, sulla sua prima sovradiagonale e sulla sua prima sottodiagonale;
- Matrici Triangolari Superiori in cui tutti gli elementi al di sotto della diagonale principele sono nulli;
- Matrici Triangolari Inferiori in cui tutti gli elementi al di sopra della diagonale principele sono nulli;

- Matrici scalari se sono diagonali e $a_{i,i} = a$, $\forall i$;
- Matrici simmetriche in cui $a_{i,j} = a_{j,i}$ $\forall i, j$. (chiaramente solo per matrici quadrate;
- Matrici sparse in cui il numero degli elementi nulli è molto maggiore del numero degli elementi non nulli.

1.2 Operazioni sulle matrici

1.2.1 Somma di matrici

Possiamo sommare due matrici $A, B \in Mat_{m,n}(\mathbb{K})$ (di uguale dimensione!) eseguendo la somma componente per componente, cioè la matrice $A + B$ risultante avrà come componenti $a_{i,j} + b_{i,j}$ con $i = 1, ..., m$ e $j = 1, ..., n$. $A + B$ è dunque della stessa dimensione di A e B.
La definizione di somma si estende per un qualsiasi numero n finito di matrici.

Esempio 1.2.1.
Date le matrici $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 9 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ -9 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix} \in Mat_{3,2}(\mathbb{Z})$,
la loro somma è:

$$A + B + C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 9 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ -9 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1+0+1 & 2+0+9 \\ 3+0+-9 & 9+0+0 \\ 0+0+8 & -5+1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 11 \\ -6 & 9 \\ 8 & -5 \end{pmatrix} \in Mat_{3,2}(\mathbb{Z})$$

1.2.2 Prodotto per uno scalare

Data un qualsiasi matrice $A \in Mat_{m,n}(\mathbb{K})$, e uno scalare $k \in \mathbb{K}$ (lo scalare appartiene allo stesso $\mathbb{K}$ degli elementi di cui è composta A!), gli elementi della matrice rA sono definiti come $r \cdot a_{i,j}$, con $i = 1, ..., m$ e $j = 1, ..., n$. La matrice rA è dunque della stessa dimensione di A.

Proposizione 1.2.1. *$\forall k \in \mathbb{K}$, $\forall A \in Mat_{m,n}(\mathbb{K})$ vale* $\quad kA = Ak$.

Esempio 1.2.2.

Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 11 & 0 \\ 0 & -6 & 9 \\ 8 & -5 & 1 \end{pmatrix} \in Mat_3(\mathbb{R})$ *e* $r = 3$, *la matrice* rA *è*

$$rA = 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 11 & 0 \\ 0 & -6 & 9 \\ 8 & -5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 2 & 3 \cdot 11 & 3 \cdot 0 \\ 3 \cdot 0 & 3 \cdot (-6) & 3 \cdot 9 \\ 3 \cdot 8 & 3 \cdot (-5) & 3 \cdot 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 33 & 0 \\ 0 & -18 & 27 \\ 24 & -15 & 3 \end{pmatrix} \in Mat_3(\mathbb{R})$$

1.2.3 Opposta

La matrice opposta di $A \in Mat_{m,n}(\mathbb{K})$ si indica con $-A$ ed ha come elementi gli opposti degli elementi di A.

Esempio 1.2.3. *Sia* $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -5 \end{pmatrix} \in Mat_{2,3}(\mathbb{R})$, *allora*

$$-A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix} \in Mat_{2,3}(\mathbb{R}).$$

1.2.4 Prodotto di un vettore riga per un vettore colonna

Osserviamo immediatamente che non è possibile fare il prodotto vettore colonna- vettore riga.

Il prodotto vettore riga - vettore colonna (su vettori con lo stesso numero di elementi!) con elementi in K è così definito:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & ... & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} := a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n \in K$$

1.2.5 Prodotto di matrici (righe per colonne)

Date la matrice $A \in Mat_{m,r}(\mathbb{K})$ e la matrice $B \in Mat_{r,n}(\mathbb{K})$, il prodotto delle due matrici AB è definito righe per colonne ed è un a matrice quadrata di ordine n.

Osservazione 1.2.1. *Il numero n delle colonne di A è uguale al numero di righe di B! Se tale ipotesi non è verificabile le due matrici non sono moltiplicabili!*

Esempio 1.2.4. *Vediamo la procedura direttamente con un esempio:*
Siano $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in Mat_{2,3}(\mathbb{R})$ *e* $B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -2 & 3 \\ 7 & -1 \end{pmatrix} \in Mat_{3,2}(\mathbb{R})$.
Allora:

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -2 & 3 \\ 7 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \cdot 5 + 4 \cdot (-2) + 0 \cdot 7 & 2 \cdot 0 + 4 \cdot 3 + 0 \cdot (-1) \\ -1 \cdot 5 + 0 \cdot (-2) + 3 \cdot 7 & -1 \cdot 0 + 0 \cdot 3 + 3 \cdot (-1) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 12 \\ 16 & -3 \end{pmatrix} \in Mat_2(\mathbb{R}).$$

Come mostra l'esempio, fare il prodotto di due matrici consiste nel vedere la prima come composta da n vettori colonna, e la seconda come composta da n vettori riga. La matrice risultante avrà nella posizione $(1, 1)$ il prodotto della prima riga di A con la prima colonna di B, nella posizione $(1, 2)$ il prodotto della prima riga di A con la seconda colonna di B e così via. In generale nella posizione (i, j) il prodotto della $i - esima$ riga di A con la $j - esima$ colonna di B con $i, j = 1, ..., n$.

Osservazione 1.2.2. *Il prodotto tra matrici non è commutativo!*

Infatti, riprendiamo l'esempio precedente e sviluppiamo il prodotto BA:

$$BA = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -2 & 3 \\ 7 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 5 \cdot 2 + 0 \cdot (-1) & 5 \cdot 4 + 0 \cdot (0) & 5 \cdot 0 + 0 \cdot 3 \\ -2 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) & -2 \cdot 4 + 3 \cdot (0) & -2 \cdot 0 + 3 \cdot 3 \\ 7 \cdot 2 + (-1) \cdot (-1) & 7 \cdot 4 + (-1) \cdot (0) & 7 \cdot 0 + (-1) \cdot 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 10 & 20 & 0 \\ -7 & -8 & 9 \\ 15 & 28 & -3 \end{pmatrix} \neq AB.$$

1.2.6 Trasposta di una matrice

La trasposta di una matrice $A \in Mat_{m,n}(\mathbb{K})$ è ottenuta scambiando l' elemento $a_{i,j}$ con l' elemento $a_{j,i}$ $\forall i, j$ (scambiare indice di riga e indice di colonna , scambiare righe e colonne). La matrice trasposta di A si indica con $A^T \in Mat_{n,m}(\mathbb{K})$.

Proposizione 1.2.2. *Per le matrici trasposte valgono le seguenti proprietà :*

1) $(A+B)^T = A^T + B^T$*;*

2) $(AB)^T = B^T A^T$*;*

2') *se* k *scalare* $(kB)^T = kA^T$*;*

3) $(A^T)^T = A$*.*

Proposizione 1.2.3. *Se per* $A \in Mat_{m,n}(\mathbb{K})$ *si ha* $A = A^T$*, allora* A *è simmetrica.*

Proposizione 1.2.4. *Se* $A \in Mat_n(\mathbb{K})$ *è triangolare superiore (inferiore), allora* A^T *è triangolare inferiore (superiore).*

Definizione 1.2.1. $A \in Mat_n(\mathbb{K})$ *si dice antisimmetrica (o emisimmetrica) se* $A^T = -A$*.*

1.2.7 Determinante

Osserviamo immediatamente che le matrici rettangolari non hanno determinante. Questa operazione è possibile unicamente per matrici quadrate. Se $A \in Mat_n(\mathbb{K})$, indichiamo il suo determinante con $|A|$ oppure con $det(A)$. Il determinante di una matrice è uno scalare $k \in \mathbb{K}$.

Calcolo del determinante

- Se $A \in Mat_1(\mathbb{K})$ cioè è un singoletto, il suo determinante è il valore del suo unico elemento.
  Se per esempio $A = (2)$ allora $|A| = 2$;

- Se $A \in Mat_2(\mathbb{K})$ il suo determinate è dato dal prodotto degli elementi sulla diagonale principale meno il prodotto degli altri due.

$$\text{Se } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad \text{allora } |A| = ad - cb;$$

- Se $A \in Mat_3(\mathbb{K})$ possiamo calcolarne il determinante con la regola di *Sarrus*:
  - accostiamo a destra della matrice la prima e la seconda colonna (oppure sotto la matrice la prima e la seconda riga);
  - sommiamo il prodotto degli elementi della diagonale principale con i prodotti degli elementi delle sue due sovradiagonali;
  - dalla precedente somma sottraiamo il prodotto degli elementi della diagonale secondaria e i prodotti degli elementi delle sue due sottodiagonali.

Esempio 1.2.5.

$$\textit{Sia } A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \textit{allora:} \quad |A| = \left|\begin{array}{ccc|cc} -1 & 2 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right. =$$

$= -1 \cdot 1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 \cdot (-2) + 3 \cdot 0 \cdot 1 - (-2 \cdot 1 \cdot 3 + 1 \cdot 4 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 \cdot 2) =$
$= -2 - 16 + 6 + 4 = -8$*;*

- Se $A \in Mat_n(\mathbb{K})$ per $n \geq 2$ è diagonale, triangolare inferiore, oppure triangolare superiore, il calcolo del suo determinante si riduce all'eseguire il prodotto degli elementi sulla sua diagonale principale;

- se $A \in Mat_n(\mathbb{K})$ per $n \geq 2$ possiamo calcolare il determinante

  1. secondo il teorema di *Laplace* rispetto ad una qualunque riga oppure colonna della matrice, in questo modo:

     – rispetto alla i-esima riga della matrice:
     $$|A| = \sum_j (-1)^{i+j} a_{i,j} \, |A_{i,j}|$$
     dove con $A_{i,j}$ intendiamo la matrice A a cui abbiamo tolto la i-esima riga e la j-esima colonna.

     – rispetto alla j-esima colonna della matrice:
     $$|A| = \sum_i (-1)^{i+j} a_{i,j} \, |A_{i,j}|$$
     dove con $A_{i,j}$ intendiamo la matrice A a cui abbiamo tolto la i-esima riga e la j-esima colonna.

  Osserviamo che $(-1)^{i+j}$ indica il fatto che se la somma dell'indice di riga e colonna è dispari, cambiamo il segno nella somma, altrimenti lo manteniamo.

  Esempio 1.2.6. *Con un esempio vediamo operativamente come trovare il determinante di una matrice quadrata di ordine* $n \geq 2$ *seguendo la regola di Laplace. (Il che è molto più facile di quanto sembra). Prendiamo la matrice* $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ *dell'esempio precedente, così vedremo che il risultato sarà lo stesso usando un metodo diverso. Calcoliamo il determinante rispetto alla prima colonna (o rispetto alla seconda riga, perchè nella posizione* $a_{2,1}$ *compare uno zero, ed i conti si semplificano, dacchè un prodotto* *si annullerà). Notiamo comunque che una qualsiasi altra riga o colonna va bene (provare per credere!). Si ha:*

$$|A| = (-1)^{1+1} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{2+1} \cdot 0 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} +$$

$$+(-1)^{3+1} \cdot (-2) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2 + 0 + (-10) = -8.$$

Definizione 1.2.2. *Lo scalare $(-1)^{i+j} |A_{i,j}|$ si chiama complemento algebrico dell'elemento $a_{i,j}$.*

2. secondo il metodo di *Gauss-Jordan* che consiste nel trasformare una matrice $A \in Mat_n(\mathbb{K})$ in una matrice triangolare superiore, applicando alle righe (o colonne) le seguenti operazioni:

   (a) scambiare tra loro due righe (colonne);

   (b) moltiplicare tutti gli elementi di una riga (colonna) per uno stesso scalare non nullo;

   (c) sommare ad una riga (colonna) un multiplo scalare di un'altra;

   con le segueni avvertenze:

   (a') ogni operazione di tipo (a) ha come effetto un cambiamento di segno nel determinante;

   (b') per ogni operazione di tipo (b) il determinante risulta moltiplicato per lo scalare;

   (c') ogni operazione di tipo (c) non modifica il determinante.

Proposizione 1.2.5. *Valgono per il detetminante le seguenti proprietà:*

- $|A| = |A^T|$;
- *Se* A *ha una riga o colonna nulla, allora* $|A| = 0$;
- *Se* A *ha due righe o colonne uguali, allora* $|A| = 0$;
- *Se* A *ha due righe o colonne linearmente dipendenti, allora* $|A| = 0$;
- *(Teorema di* ***Binet****) Se* $A, B \in Mat_n(\mathbb{K})$ *si ha:* $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$.

1.2.8 Rango

Il rango di una matrice A è il numero massimo di righe (o di colonne) linearmente indipendenti di A. Lo indichiamo con $rg(A)$.
Alcune delle proprietà del rango di una matrice sono:

- $0 \leq rg(A) \leq \min\{m, n\}$;
- $rg(A) = rg(A^T)$.

Come calcolare il rango

1. Se $A \in Mat_n(\mathbb{K})$ è tale che $|A| \neq 0$, allora $rg(A) = n$;
2. Se $A \in Mat_n(\mathbb{K})$ è tale che $|A| = 0$, allora $rg(A) < n$ e si trova calcolando il determinante dei minori di A in questo modo:
   - se tra tutti gli M_{n-1}, minori di A di ordine $n-1$, ne esiste uno con determinante non nullo, allora $rg(A) = n-1$, altrimenti se tutti hanno determinante nullo, $rg(A) < n-1$ e si procede nello stesso modo con i minori di ordine inferiore.

Osservazione 1.2.3. *La matrice nulla è l'unica con rango nullo.*

Esempio 1.2.7. *Calcoliamo il rango di* $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in Mat_3(\mathbb{R})$.

A non ha rango 3, infatti $|A| = 0$.

Controlliamo allora se esiste un minore di ordine 2 *con determinante non nullo.*

Alcuni minori hanno determinante nullo, ad esempio $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *o* $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Esiste però almeno un minore, ad esempio $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, *che ha determinante non nullo. Allora* $rg(A) = 2$.

Esercizi 1.2.1. *Trovare il rango delle seguenti matrici:*

1. $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

2. $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

3. $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

4. $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$;

5. $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

1.2.9 Inversa

Una matrice $A \in Mat_n(\mathbb{K})$ è invertibile se $\exists B \in Mat_n(\mathbb{K})$ tale che $AB = BA = I$, dove con I indichiamo la matrice identica di ordine n. Osserviamo che la matrice B se esiste è unica. Indichiamo l'inversa di A con A^{-1}. Esistono vari metodi per il calcolo dell'inversa di una matrice quadrata invertibile A. Tra i metodi principali:

1. Metodo della Matrice dei cofattori o del Complemento algebrico;
2. Algoritmo di Gauss-Jordan;
3. Metodo delle potenze inverse.

Vediamo come si calcola l'inversa col metodo del complemento algebrico.

- se $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in Mat_2(\mathbb{K})$, allora

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \in Mat_2(\mathbb{K});$$

- $A \in Mat_n(\mathbb{K})$, $n \geq 2$ la matrice inversa si calcola in questo modo:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \quad C_{i,j}^T$$

  dove con $C_{i,j}$ intendiamo la matrice in cui in ogni posizione i, j figura il complemento algebrico $c_{i,j}$ dell' elemento $a_{i,j}$ di A.

Proposizione 1.2.6. *$A \in Mat_n(\mathbb{K})$ è invertibile $\Longleftrightarrow |A| \neq 0$.*

Il calcolo delle matrici inverse è molto più semplice di quanto sembra. Vediamolo con qualche esempio.

Esempio 1.2.8. *Sia* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \in Mat_2(\mathbb{R})$. *Calcoliamo* A^{-1} *come indicato nel caso specifico di matrici quadrate di ordine 2. (E' un caso particolare del metodo dei complementi algebrici, ma molto più veloce. Provare comunque anche l'altro metodo per esercizio).*
Innanzitutto calcoliamo il determinante di A, per vedere se è diverso da zero. Si ha: $|A| = 1 \cdot (-3) - 2 \cdot 0 = -3 \neq 0$. *Possiamo dunque calcolare* A^{-1} *che è:*

$$A^{-1} = \frac{1}{-3} \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \in Mat_2(\mathbb{R}).$$

Resta da verificare che $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$, *cioè* A^{-1} *inversa di A. (Provare per esercizio!).*

Esempio 1.2.9. *Sia* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in Mat_3(\mathbb{R})$, *calcoliamo* A^{-1} *e vediamo che è inversa di A.*

- $|A| = 4 + 1 - 4 = 1 \neq 0$. *Esiste inversa;*
- *calcoliamo i complementi algebrici* $c_{i,j} = (-1)^{i+j} |C_{i,j}|$ *di ogni* $a_{i,j}$ $i = 1, 2, 3$ *e* $j = 1, 2, 3$.
  - $c_{1,1} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5;$
  - $c_{1,2} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -4;$
  - $c_{1,3} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2;$
  - ... *(fare tutti gli altri analogamente).*

- $A^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -4 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$;

- $A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -4 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 5-4 & -2+2 & -1+1 \\ 10-8-2 & -4+4+1 & -2+2 \\ -4+4 & 2-2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3.$$

Proposizione 1.2.7. *Valgono:*

1. *Se* $A \in Mat_n(\mathbb{K})$ *invertibile, si ha:* $|A^{-1}| = |A|^{-1}$.

2. *Il prodotto di due matrici invertibili* $A, B \in Mat_n(\mathbb{K})$ *è ancora invertibile, con inversa* $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Autovalori, Autovettori e Autospazi

Definizione 1.2.3. *Se $A \in Mat_n(\mathbb{K})$, definiamo autovalori di A quegli scalari λ che annullano il polinomio caratteristico di A.*

Definizione 1.2.4. *Il polinomiio caratteristico di $A \in Mat_n(\mathbb{K})$, è il determinante della matrice $A - \lambda I$ e risulta essere un polinomio di grado n nell'indeterminata λ a coefficienti in $\mathbb{K}$.*

Esempio 1.2.10. *Troviamo gli autovalori della matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in Mat_3(\mathbb{R}).$$

- *Troviamo il suo polinomio caratteristico:*

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \begin{matrix} 1-\lambda & 0 \\ 2 & 2-\lambda = \\ 0 & 1 \end{matrix}$$

$$= (1-\lambda)(2-\lambda)^2 + (1-\lambda) = (1-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 5);$$

- *Gli autovalori di A annullano il polinomio caratteristico, poniamo allora*

$$(1-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 5) = 0$$

da cui risultano tre radici cioè tre autovalori di A:

$$\lambda_1 = 1, \qquad \lambda_2 = 2 + i, \qquad \lambda_3 = 2 - i.$$

Definizione 1.2.5. *Data una matrice A con autovalore λ, un vettore $\underline{v}$ si dice autovettore di A relativo all'autovalore λ se*

$$A(\underline{v}) = \lambda \underline{v}.$$

Definizione 1.2.6. *Se λ autovalore di A, indichiamo con*

$$V_\lambda = \{\underline{v} \neq \underline{0} | A(\underline{v}) = \lambda \underline{v}\} \cup \{\underline{0}\}$$

l'autospazio relativo all'autovalore λ.

Esempio 1.2.11. *Sia $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -6 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \in Mat_3(\mathbb{R})$. Calcolare autovalori e autospazi relativi.*

Svolgimento:

1. *Autovalori: troviamo le radici del polinomio caratteristico di A:*
   $|A - \lambda I| = -\lambda(2-\lambda)(5-\lambda) + 6(2-\lambda) = (2-\lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 6) =$
   $= (2-\lambda)(\lambda-2)(\lambda-3) = -(\lambda^2 - 4\lambda + 4)(\lambda - 3) = -(\lambda-2)^2(\lambda-3).$
   Ponendo

   $$-(\lambda-2)^2(\lambda-3) = 0$$

   troviamo gli autovalori

   $$\lambda_1 = 2 \quad e \quad \lambda_2 = 3;$$

2. *Autospazio V_2 relativo all'autovalore $\lambda_1 = 2$:*

$$V_2 = \{v \in \mathbb{R}^3 | Av = 2v\}$$

Calcoliamo $Av = 2v$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -6 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -6z \\ -x + 2y - 3z \\ x + 5z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x = -3z \\ y = y \\ z = z \end{cases} \iff \begin{cases} x = -3z \\ \forall y \\ \forall z \end{cases}$$

Allora possiamo scrivere

$$V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} -3z \\ y \\ z \end{pmatrix} | y, z \in \mathbb{R} \right\} =< \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} >$$

Autospazio V_3 relativo all'autovalore $\lambda_2 = 3$: analogamente al precedente, fare per esercizio!

1.2.10 Moleplicità algebrica e geometrica degli autovalori

Definizione 1.2.7. *Sia λ autovalore di A e V_λ l'autospazio relativo. Allora*

$$dimV_\lambda =: g_\lambda =: \textit{molteplicità geometrica dell'autovalore } \lambda$$

Definizione 1.2.8. *Sia λ autovalore di A. Si definisce molteplicità algebrica a_λ di λ la sua molteplicità come radice del polinomio caratteristico di A.*

Vale il seguente risultato:

Teorema 1.2.1. *Se λ autovalore di A, si ha:* $1 \leq g_\lambda \leq a_\lambda$.

In generale $g_\lambda \neq a_\lambda$.

Esempio 1.2.12. *Consideriamo l'esempio 1.2.11 della sezione precedente. Si ha:*

$$g_{\lambda_1} = dimV_{\lambda_1} = 2 = a_{\lambda_1}.$$

Calcolare per esercizio g_{λ_2} e a_{λ_2}.